ESPECTRO MULTIFRACTAL PARA FAMILIAS DE FUNCIONES UNIDIMENSIONALES

Mesón, Alejandro M. y Vericat, Fernando
Grupo de Aplicaciones Matemáticas y Estadísticas de la Facultad de ingeniería (GAMEFI) Departamento de Ciencias Básicas

Correo: meson@iflysib.unlp.edu.ar, vericat@iflysib.unlp.edu.ar

Por un sistema dinámico entendemos simplemente un espacio X (espacio fase) con una función que transforma cada punto de X en otro punto de X. El espacio X puede ser considerado como parte de la recta real, del plano o del espacio tridimensional, o más generalmente espacios abstractos con determinadas estructuras (espacios de probabilidad, espacios métricos o topológicos etc). La función debe preservar tales estructuras. Las órbitas o trayectorias de un punto x perteneciente a *X*, hasta "tiempo" *n*, está formada por los puntos $x_0 = x$, $x_1 = f(x),\ldots, x_{n-1} = f^{n-1}(x)$, en el área de Sistemas Dinámicos se estudia esencialmente el comportamiento y distribución de las órbitas. Un importante tema en esta disciplina es estimar la frecuencia de visitas de órbitas a determinadas regiones. Podemos modelar esto por distribuciones en "manchas frías", o sea donde hay menos visitas y "manchas calientes" donde hay más. Esto dependerá de una escala. Si subdividimos el espacio en una grilla de conjuntos B_i con tamaño r_i (tamaño por ejemplo=volumen o área) y si p_i =volumen o área de B_i, entonces p_i es la distribución de manchas frías y calientes. La escala está dada por los exponentes $p_i = r_i^{\alpha}$. Esto da una "estructura multifractal". Más generalmente el Análisis Multifractal" trata con la descomposición de un conjunto en conjuntos de nivel (espectro multifractal) de la forma

$$K_\alpha = \{x : \mathrm{h}(x) = \alpha\}, \text{ para una cierta función } h.$$

Si bien estos conjuntos tienen una estructura geométrica compleja, pueden describirse por funciones con un "buen comportamiento" (*milagro multifractal)*. Los multifractales se aplican entre otras áreas en distribuciön de galaxias, turbulencia, crecimiento celular, redes de tráfico, distribución espacial de combustible y minerales, temas financieros, etc.

En esta comunicación consideramos la familia de funciones $f_a : X \to X,\ \ X = [-1,1]$ definida por $f(x) = 1 - ax^2,\ \ 0 < a < 2$ (*funciones de Benedicks-Carleson*), la suma de Birkhoff para un potencial $\varphi : X \to \mathbf{R}$ y dinámicos f se define como

$$S_n(\varphi)(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \varphi(f^i(x)),$$

el espectro a analizar es el cociente de sumas de Birkhoff

$$K_{\alpha,,\varphi,\psi} = \left\{ x : \lim_{n\to\infty} \frac{S_n(\varphi)(x)}{S_n(\psi)(x)} = \alpha \right\}$$

El resultado principal es la descripción de la dimensión de Hausorff (o dimensión fractal) del conjunto multifractal $K_{\alpha,,\varphi,\psi}$ por una fórmula variacional.

Palabras clave: Espectro multifractal, sumas de Birkhoff, funciones unidimensionales

INTRODUCCION

Como mencionamos anteriormente por un sistema dinámico entendemos un espacio fase X con una función f (dinámicos)que transforma cada punto de X en otro punto de X. Esto lo podemos visualizar de la siguiente manera sea x_i un punto de X entonces x_i se transformará en el punto $x_{i+1} = f(x_i)$. En Teoría Ergódica se consideran las transformaciones de cada punto x en los puntos $x_0 = x$, $x_1 = f(x), \ldots, x_{n-1} = f^{n-1}(x)$. Cada uno de los puntos así obtenidos se llaman las *órbitas de x.*

Los denominados promedios ergódicos son promedios de funciones reales definidas sobre X a lo largo de las órbitas de puntos pertenecientes a tal espacio. Al sistema dinámico formado por el par (X, f) se le agregará una medida de probabilidad μ sobre X de modo que tendremos un espacio de probabilidad. Recordemos que las sumas de Birkhoff, o sumas estadísticas, se definen de la siguiente manera: sea φ una función definida sobre X a valores reales ,la suma de Birkhoff de orden n en el punto x es

$$S_n(\varphi)(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \varphi(f^i(x)) \tag{1}$$

El teorema ergódico de Birkhoff establece la convergencia del promedio ergódico $\frac{1}{n} S_n(\varphi)(x)$ cuando $n \to \infty$. Tal convergencia se da para todos los puntos del espacio excepto en un conjunto de elementos que tiene lo que denomina medida nula, esto es la probabilidad μ de cada uno de esos conjuntos es 0. En general la motivación para estudiar este tipo de promedios es disponer de una descripción cualitativa del comportamiento global de las órbitas, lo cual es de interés especialmente en relación a sistemas tan complejos que una descripción detallada de las mismas es poco menos que imposible.

Una estructura fractal puede aparecer por ejemplo de la siguiente manera, supongamos que tomamos un segmento, lo subdividimos en tres partes y le quitamos la central, a cada de las partes que quedan las volvemos a subdividir y nos quedamos con las dos de los extremos y así, nos quedaría un conjunto cuya dimensión no es cero ni tampoco 1, es un conjunto de dimensión fractal (fraccionaria). Un caso de fractalidad puede ocurrir si se quiere medir la longitud de una costa, se van tomando aproximaciones por segmentos lo que daría un conjunto de naturaleza fractal cuya dimensión está entre uno y dos. El Análisis Multifractal consiste como, su nombre lo indica, en considerar varias estructuras fractales por medio de una descomposición del espacio X en conjuntos de nivel de naturaleza fractal. El problema es describir tales conjuntos por medio de diversas funciones (entropía topológica, dimensión de Hausdorff, etc) que miden la dimensión de estos conjuntos, que, según dijimos, no tiene por que ser entera. Aquí de nuevo se trata de lograr una descripción cualitativa de sistemas dinámicos cuya complejidad hace imposible un estudio más detallado. Tal es el caso de la predicción del clima visto como la manifestación de un sistema dinámico muy complejo.

Como puntualizamos antes el Análisis Multifractal consiste en considerar una descomposición del espacio fase en conjuntos de nivel y desarrollar un formalismo para describir su dimensión de Hausdorff (u otra dimensión) por medio de función que en lo posible muestre un “buen comportamiento”. Recordemos que la descomposición a considerar es el espectro correspondiente a cocientes de sumas de Birkhoff

$$K_{\alpha,,\ ,\psi} = \left\{ x : \lim_{n\to\infty} \frac{S_n(\varphi)(x)}{S_n(\psi)(x)} = \alpha \right\}$$

donde los dinámicos estarán dados por funciones $f : X \to X,\ \ X = [-1,1]$ (funciones de Benedicks-Carleson) definidas por $f_a(x) = 1 - ax^2,\ \ 0 < a < 2$, con ciertas propiedades, fundamentalmente el hecho que hay un conjunto $\Delta \subset (0,2)$ tal que $f = f_a$ en Δ. La descripción de espectros multifractales para funciones en una dimensión fue estudiada extensivamente para funciones que no tienen puntos críticos, para el caso de las funciones de Benedicks-Carleson **(1),** que tienen un punto crítico en $x_0 = 0$, Chung y Takahasi **(2)** efectuaron una descripción multifractal pero no para cocientes, sino para una sola suma de Birkhoff. El problema de la descripción de espectros multifractales de promedios ergódicos para funciones sin puntos críticos o sistemas uniformemente hiperbólicos fue bastamente estudiado, por ej **(3),(4),(5),(6)**. El propósito de esta comunicación es continuar con el análisis para cocientes de promedios ergódicos. La presencia de puntos críticos dificulta la obtención de una representación simbólica. En el caso tratado por Iommi y Jordan **(3)** estos realizan una descripción multifractal para cocientes de promedios ergódicos pero para una clase de funciones unidimensionales sin puntos críticos, los cuales son conjugados a un espacio simbólico lo cual hace la representación más directa. Los potenciales considerados pertenecerán a una clase de funciones de distorsión acotada que denotamos por C_f y que luego explicitaremos como está constituida. Además denotamos

$$\overline{\alpha} = \sup\left\{ \lim \frac{S_n(\varphi)(x)}{S_n(\psi)(x)} \right\}$$

$$\underline{\alpha} = \inf\left\{ \lim \frac{S_n(\varphi)(x)}{S_n(\psi)(x))} \right\}$$

RESULTADO PRINCIPAL

Por $D(Z)$ denotamos la dimensión de Hausdorff o dimensión fractal del conjunto Z Con $h(\mu)$ y $\lambda(\mu)$ denotamos respectivamente la entropía y el exponente de Lyapunov de medida μ.

Teorema: Consideremos un conjunto de parámetros a tal que $f = f_a$, con f_a una familia de funciones de Benedicks-Carleson; sean $\varphi\ ,\psi \in C_f$ con φ,ψ tal que $S_n(\psi)(x) > n\eta$, para alguna constante η y para todo n, entonces para todo $\alpha \in \left(\underline{\alpha},\overline{\alpha}\right)$ es valido

$$D(K_{\alpha,\,,\varphi\ ,\psi}) = \lim_{\varepsilon\to 0}\sup\left\{\frac{h(\mu)}{\lambda(\mu)} : \frac{\int \varphi d\mu}{\int \psi d\mu} \in (\alpha-\varepsilon,\alpha+\varepsilon)\right\},$$

donde el supremo se toma sobre todas las medidas f invariantes μ con $\int \varphi d\mu < \infty$

La continuidad del espectro puede analizarse de manera similar a lo hecho en (3), una vez que se estableció la formula variacional del teorema. Sean los conjuntos

$$\overline{A} = \sup\left\{\alpha : \text{existe una secuencia } x_n \text{con } x_n \to 0 \ \text{ y } \limsup_{n\to\infty} \frac{\varphi(x_n)}{\psi(x_n)} = \alpha\right\}$$

$$\underline{A} = \inf\left\{\alpha : \text{existe una secuencia } x_n \text{con } x_n \to 0 \ \text{ y } \liminf_{n\to\infty} \frac{\varphi(x_n)}{\psi(x_n)} = \alpha\right\}$$

y sea $J = (\underline{\alpha},\overline{\alpha}\_) - (\underline{A},\overline{A})$. Luego la función $\alpha \in J \to D(K_{\alpha,,\ \varphi,\psi})$ es continua.

Bosquejo de la demostración del teorema:

Un asunto fundamental para la obtención del resultado variacional del teorema es la construcción de particiones del intervalo $X = [-1,1]$, o mas precisamente un subintervalo de este, para poder tener una representación simbólica del sistema. Como mencionamos anteriormente la presencia de un punto crítico hace necesario que se diseñen tipos especiales de técnicas para tales construcciones. Estos métodos se denominan *esquemas inducidos*, o *torres*. La idea fundamental en **(2)** es es la construcción de esquemas inducidos con una propiedad especial de recurrencia, esto es considerar un entorno $I = (-\delta,\delta)$ del punto critico $x_0 = 0$ y estudiar como retornan las orbitas de los puntos de I. Las orbitas de las funciones de Benedicks-Carleson fueron estudiadas justamente por estos autores y fueron clasificadas en distintos tipos según el retorno. La idea fundamental de Chung y Takehasi es analizar el crecimiento de la derivada fuera del entorno. Damos una breve descripción de las técnicas utilizadas, se comienza con una subdivisión del intervalo $I = (-\delta,\delta)$, a partir de la subdivisión se obtiene una partición $\overline{P}_n$ del intervalo $\overline{X} = \left[-\overline{x},\overline{x}\right]$, donde $\overline{x}$ es un punto fijo de f en X .En los miembros de esta partición se verifica una propiedad de distorsión acotada para las derivadas de f. Además a partir de la subdivisión del entorno del punto crítico se obtiene un conjunto Λ, formado por algunos elementos de tal partición. Inductivamente se define a partir de Λ una nueva partición intervalos Q una función de tiempo de retorno $R : Q \to$ **N.** Finalmente se consideras “torres ”

$\Delta = \{(x,l) : x \in \Lambda, l \in \{0,1,...,R(x)-1\}\}$ sobre las cuales f induce una función $\overline{f}$, que es interpretada como un ascenso de cada punto (x,l) a la torre y un descenso al “piso”

$\left(f^{R(x)},0\right)$. Una partición P_n inducida de $\overline{P}_n$ puede llevarse a la torre $\Delta=\{(x,l):R>l\}$, formada por las "colas" de la función de tiempo de retorno . Llamamos a esta partición también P_l y además $D=:\bigcup_n \mathrm{P}_n$ es una partición de las denominadas de Markov. Este tipo de particiones permiten tener una representación simbólica del sistema, esto es una aplicación suryectiva y contínua sobre un espacio simbólico de secuencias en un alfabeto finito. Si D^n es lo que se llama el refinamiento por "nombres de longitud n" de D entonces

$$D_0^n=\left\{D^n\in\Delta_0:\left|\frac{S_n(\varphi)(x)}{S_n(\psi)(x)}-\alpha\right|<\varepsilon\right\}$$, para algún $x\in D^n$.

Una herradura para una función f es una colección de intervalos con ciertas propiedades. El nombre genérico de herradura surge por la construcción, de conjuntos con esta forma, hecha por Smale para sistemas hiperbólicos. De la base de la partición D_0^n se puede extraer una colección de intervalos $I_1,I_2,\ldots,I_M$ que resultan una herradura para $F=f^r$ para un cierto natural r. Así obtenemos una conjugación (función suryectiva y continua) entre un espacio de secuencias en M símbolos y Λ. La clase C_f que mencionamos en el enunciado del teorema está formada por todas las funciones φ tales que hay un número K de manera que para todo n suficientemente grande se verifica que si $x,y\in P_n$ entonces $|S_n(\varphi)(x)-S_n(\varphi)(y)|<K$.

Para la demostración del teorema usamos el siguiente resultado: Sean $\varphi,\psi\in C_f$ y tal que $S_n(\psi\psi)(x>n\eta$ entonces para un dado $\varepsilon>0$ para todo $x,y\in P_n$ se verifica $\left|\frac{S_n(\varphi)(x)}{S_n(\psi)(x)}-\frac{S_n(\varphi)(y)}{S_n(\psi)(y)}\right|<\varepsilon$ para n suficientemente grande. Para obtener la cota superior de la fórmula variacional a demostrar se utilizada para calcular la dimensión fractal un cubrimiento de $K_{\alpha,\varphi,\psi}$ por conjuntos de la partición D_0^n , sea $s_n=\inf\left\{s:\sum_{A\in D_0^n}|A|\leq 1\right\}$, por definición de dimensión de Hausdorff $D(K_{\alpha,\varphi,\psi})\leq\lim_{n\to\infty}s_n$. Luego para establecer la cota superior se relaciona a este límite con medidas soportadas sobre la herradura. La representación simbólica a partir de la herradura permite definir una secuencia de medidas m_n que tal que $\frac{h(m_n)}{\lambda(m_n)}$ aproxima a s_n , de esta forma y usando el resultado de distorsión acotada descripto al principio de este párrafo se obtiene, luego de algunos cálculos, la cota superior deseada.

Para la cota inferior se usan las construcciones de (1) para obtener un fractal F y una medida v tal que $v(F)=1$. La dimensión de una medida v en punto x se define como se define como $D_v(x)=\lim_{\eta\to 0}\frac{v(B_\eta(x))}{\log\eta}$, donde $B_\eta(x)$ es la bola de centro x y radio η. Se tiene además que $\lim_{n\to\infty}\frac{S_n(\varphi)(x)}{S_n(\psi)(x)}=\alpha$, para todo $x\in F$. Luego se prueba que

$D_v(x) \geq \lim_{\varepsilon \to 0} \sup \left\{ \frac{h(\mu)}{\lambda(\mu)} : \frac{\int \varphi d\mu}{\int \psi d\mu} \in (\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon) \right\}$, para todo $x \in F$. Finalmente por el llamado lema de volumen **(8),** tiendo en cuenta que el fractal F tiene medida total, se puede afirmar que

$$D(K_{\alpha,\varphi,\psi}) \geq \lim_{\varepsilon \to 0} \sup \left\{ \frac{h(\mu)}{\lambda(\mu)} : \frac{\int \varphi d\mu}{\int \psi d\mu} \in (\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon) \right\}.$$

CITAS BIBLIOGRAFICAS

(1) M. Benedicks and I. Carleson , On iterations of $f(x) = 1 - ax$ on $(-1,1)$, *Acta Math.* **122,** (1985) 1-25.

(2) Y. Moo Chung and H. Takahasi, Multifractal formalism for Benedicks.Carleson quadratic maps, *Erg. Th & Dynan. Sys.* **34,** (2014) 1116-1141.

(3) G. Iommi and T. Jordan, Multifractal Analysis for quotients of Birhoff sums for countable Markov maps*, Int. Math. Reserch Notices, vol* **2015,** (2015) 460-498.

(4) Y. Pesin and H. Weiss, A multifractal analysis of equilibrium measures for confoemal expanding maps and Moran-like constructions, *J. Stat. Phys,* **86,** (1997) 233-275.

(5) V. Climenhaga, Bowen ´s equation in non-uniform setting, *Erg. Th & Dynan. Sys.* **31,** (2011) 1163-1182.

(6) L. Barreira and J. Scmeling, sets of “non-typical” points have full Hausdorff dimension and fulll topological entropy, *Israel J. Math.* **116,** (200) 29-70. .

(7) H. Weiss, The Lyapunov spectrum for conformal mappings and Axiom-A surface diffeomorphisms, *J. Stat. Phys,* **95,** (1999) 615-632.

(8) Y. Pesin, *Dimension Theory in Dynamical Systems,* University of Cichago Press, IL (1997). .